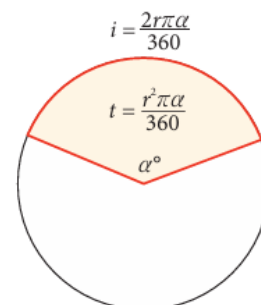


KÖZÉPPONTI SZÖG, KÖRÍV, KÖRCIKK, GYAKORLÁS

ELMÉLET

Ha egy r cm sugarú körben egy középponti szög α° -os, akkor a hozzá tartozó **körív hossza** a kerület 360-ad részének az α -szorosa. Ha ennek a cm-ben mért hosszúságát i -vel jelöljük, akkor $i = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi\alpha}{180}$ (cm).

Ugyanebben a körben egy α° -os középponti szöghöz tartozó **körcikk területe** a körterület 360-ad részének az α -szorosa. Ha ennek a cm^2 -ben mért nagyságát t -vel jelöljük, akkor $t = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ (cm^2).



A körlapot a kör egy húrja két **körseletre** bontja.

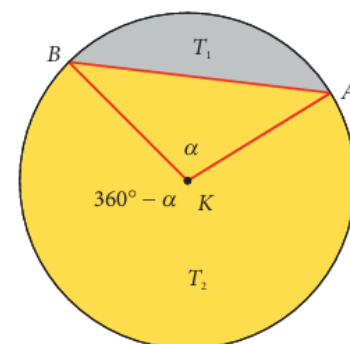
Másképp: A **körselet** olyan síkidom, melyet az adott kör egy íve és az ív végpontjait összekötő húr határol.

A körselet területét meghatározhatjuk a körselethez tartozó körcikk és háromszög területének ismeretében. Legyen T_1 és T_2 a K középpontú kör két körseletének területe (az ábrán rendre szürke, illetve sárga színnel jelölve).

Az ábrán látható szürke körselet területe: $T_1 = T_{\text{körcikk}(\alpha)} - T_{ABK\Delta}$

Az ábrán látható sárga körselet területe: $T_2 = T_{\text{körcikk}(360^\circ - \alpha)} + T_{ABK\Delta}$

Mindezek mellett teljesül, hogy $T_1 + T_2 = T_{\text{kör}}$



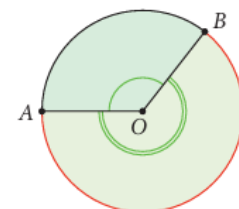
ELMÉLET

Rajzoljuk meg egy kör két sugarát, az OA -t és az OB -t!

Így a körvonalat két **körívre**, a körlemezt két **körcikkre** bontottuk.

Két olyan szöget is látunk, amelyeknek O a csúcsa, az OA és az OB félegyenes pedig a két szára. Ezeket a szögeket az adott körben a megfelelő körívhez vagy körcikkhez tartozó **középponti szögeknek** nevezzük.

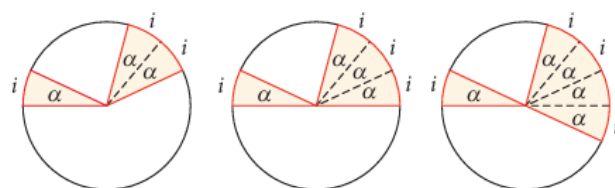
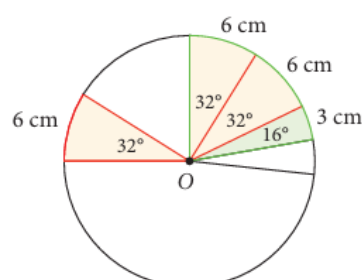
A körbe rajzolt két sugár két olyan középponti szöget ad meg, amelyeknek az összege egy teljesszög.



Tétel: Egy körben

- egyenlő nagyságú középponti szögekhez egyenlő hosszúságú körívek és egybevágó körcikk tartoznak;
- egyenlő hosszúságú körívekhez egyenlő nagyságú középponti szögek és egybevágó körcikk tartoznak;
- egybevágó körcikkhez egyenlő nagyságú középponti szögek és egyenlő hosszúságú körívek tartoznak.

Tétel: Egy körben a középponti szögek nagysága, a hozzájuk tartozó körívek hosszúsága és a hozzájuk tartozó körcikk területe egyenesen arányos.



Például az ábrán megadott kör esetében: a 80° -os középponti szög 2,5-szer akkora, mint a 32° -os, ezért 2,5-szer olyan hosszú (15 cm-es) körív és 2,5-szer akkora területű körcikk tartozik hozzá, mint a 32° -oshoz.

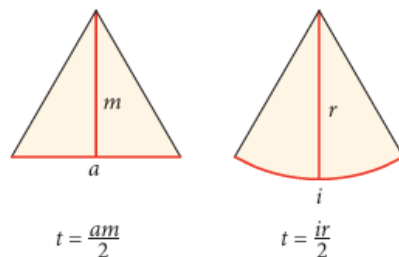
Fordítva: a 15 cm hosszú körívhez 2,5-szer akkora középponti szög tartozik, mint a 6 cm hosszúhoz (valóban, $15 : 6 = 80 : 32 = 2,5$).

ELMÉLET

Az ívhosszat megadó $i = \frac{2r\pi\alpha}{360}$ és a körcikk területét megadó $t = \frac{r^2\pi\alpha}{360}$ képletek jobb oldalán szereplő két törtben több közös tényezőt látunk. Ha az első törtet megszorozzuk r -rel és elosztjuk 2-vel, éppen megkapjuk a másodikat.

Ez azt jelenti, hogy $t = \frac{ir}{2}$, ami nagyon hasonlít a háromszög területképletéhez.

Ha például tudjuk, hogy egy 24 cm^2 területű körcikk egy 6 cm sugarú körben van, akkor ebből fejben is kiszámíthatjuk, hogy a hozzá tartozó ívhossz 8 cm .



FELADATOK

- 1** A Harry Potter-könyvekben szerepel egy óra, amely nem az időt mutatja, hanem azt, hogy melyik családtag hol tartózkodik éppen. A mutatókon szerepelnek a családtagok, a „számlapon” pedig a lehetséges helyszínek, mint *iskola*, *munkahely*, *otthon*, *útközben*, *életveszélyben* stb. (Akadt olyan lelkes olvasó, aki GPS és mobiltelefonok segítségével készített egy ilyen szerkezetet a saját családjához.) Egy ilyen óra kerülete legyen 48 cm. Az óra „számlapja” 5 db, körcikk alakú területre van bontva. Az *iskola* rész 12 órától 4 óráig tart (amennyiben egy hagyományos óra számlapjához viszonyítjuk), a *munkahely* rész 4 órától 6 óráig, az *útközben* rész 6-tól 8 óráig, az *otthon* rész 8-tól 11 óráig, az *életveszélyben* rész pedig 11-től 12 óráig.

- a) Milyen hosszú körívek tartoznak az egyes részekhez az óra „számlapjának” kerületén?
b) Mekkora az egyes tartományokban az a szög, amelyet a tartományokat határoló sugarak zárnak közre?



Megoldás:

A teljes kerület $K = 48$ cm, a teljes szög pedig 360.

a) Az ívhosszak kiszámítása

Mivel a teljes kör (12 óra) 48 cm, ezért 1 órányi szakasz hossza:

$$48 \text{ cm} / 12 = 4 \text{ cm}$$

Ezt felhasználva kiszámolhatjuk az egyes szektorokhoz tartozó íveket:

Helyszín	Időtartam (óra)	Számítás	Ívhossz
Iskola	12-től 4-ig = 4 óra	$4 \times 4 \text{ cm}$	16 cm
Munkahely	4-től 6-ig = 2 óra	$2 \times 4 \text{ cm}$	8 cm
Útközben	6-től 8-ig = 2 óra	$2 \times 4 \text{ cm}$	8 cm
Otthon	8-től 11-ig = 3 óra	$3 \times 4 \text{ cm}$	12 cm
Életveszély	11-től 12-ig = 1 óra	$1 \times 4 \text{ cm}$	4 cm

b) A középponti szögek kiszámítása

Mivel a teljes kör 360° ezért **1 órányi szakasz** szöge:

$$360^\circ / 12 = 30^\circ$$

Ennek alapján a tartományokat határoló sugarak által bezárt szögek:

Iskola: $4 \times 30^\circ = 120^\circ$

Munkahely: $2 \times 30^\circ = 60^\circ$

Útközben: $2 \times 30^\circ = 60^\circ$

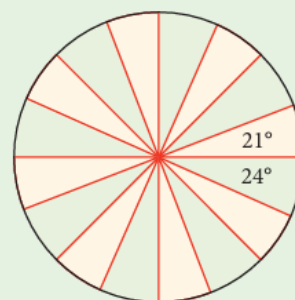
Otthon: $3 \times 30^\circ = 90^\circ$

Életveszély: $1 \times 30^\circ = 30^\circ$

Ellenőrzés: $120 + 60 + 60 + 90 + 30 = 360^\circ$, tehát a számítás helyes!

2 Az ábrán látható szerencsekerék „nyert” mezői (az ábrán rózsaszínnel jelölve) 21° -os középponti szögű körcikkek, „nem nyert” mezői 24° -os középponti szögű körcikkek. A kerék sugara a valóságban 50 cm. A táblázat kitöltésével válaszolj a kérdésekre! A füzetedben dolgozz!

- a) Mekkora körív tartozik egy „nyert” feliratú mezőhöz, és mekkora egy „nem nyert” feliratúhoz?
- b) Mekkora egy nyerő és egy nem nyerő körcikk területe?



Középponti szög fokban	Körív hossza cm-ben	Körcikk területe cm^2 -ben
360°		
1°		
21°		
24°		

Megoldás:

Ebben a feladatban a kör kerületének és területének arányos részeit kell kiszámolnunk.

Adott a sugár: **$r = 50 \text{ cm}$** .

Használjuk a $\pi \approx 3,14$ közelítést.

1. Alapadatok kiszámítása (360°)

Először számoljuk ki a teljes kör kerületét (K) és területét (T):

Kerület:

$$K = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 50 \cdot 3,14 = \mathbf{314 \text{ cm}}$$

Terület:

$$T = r^2 \cdot \pi = 50^2 \cdot 3,14 = 2500 \cdot 3,14 = \mathbf{7850 \text{ cm}^2}$$

2. Az 1°-os egység kiszámítása

Mivel a kör 360°-os, az egy fokhoz tartozó értékeket osztással kapjuk meg:

Ívhossz (1°): $314 / 360 \approx 0,872$ cm

Terület (1°): $7850 / 360 \approx 21,806$ cm²

A kitöltött táblázat és a válaszok:

Szorozzuk meg az 1°-ra jutó értékeket a megadott szögekkel (21° és 24°).

Középponti szög	Körív hossza (i)	Körcikk területe (t)
360° (teljes kör)	314 cm	7850 cm ²
1°	$\approx 0,872$ cm	$\approx 21,8$ cm ²
21°	$\approx 18,317$ cm	$\approx 457,925$ cm ²
24°	$\approx 20,933$ cm	$\approx 523,325$ cm ²

1. Körív hossza (i) számítása

A körív hosszát az $i = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ (vagy $i = \frac{K \cdot \alpha}{360}$) képlettel számoljuk.

- 1°-os szög esetén:

$$i_{1^\circ} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 3,14 \cdot 1}{360} = \frac{314}{360} \approx 0,872 \text{ cm}$$

- 21°-os szög esetén:

$$i_{21^\circ} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 3,14 \cdot 21}{360} = \frac{314 \cdot 21}{360} = \frac{6594}{360} \approx 18,317 \text{ cm}$$

- 24°-os szög esetén:

$$i_{24^\circ} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 3,14 \cdot 24}{360} = \frac{314 \cdot 24}{360} = \frac{7536}{360} \approx 20,933 \text{ cm}$$

2. Körcikk területe (t) számítása

A területet a kért $t = \frac{i \cdot r}{2}$ összefüggéssel számoljuk ki, behelyettesítve a fent kapott ívhosszakat.

- 1° -os szög esetén:

$$t_{1^\circ} = \frac{0,872 \cdot 50}{2} = 0,872 \cdot 25 \approx \mathbf{21,8 \text{ cm}^2}$$

- 21° -os szög esetén:

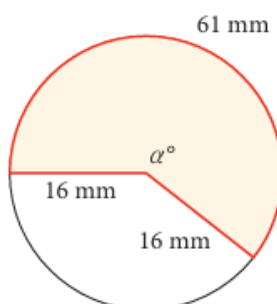
$$t_{21^\circ} = \frac{18,317 \cdot 50}{2} = 18,317 \cdot 25 \approx \mathbf{457,925 \text{ cm}^2}$$

- 24° -os szög esetén:

$$t_{24^\circ} = \frac{20,933 \cdot 50}{2} = 20,933 \cdot 25 \approx \mathbf{523,325 \text{ cm}^2}$$

GYAKORLÁS

Mekkora középponti szög tartozik egy 16 mm sugarú körben a 61 mm hosszú körívhez? Mekkora az ugyanehhez a középponti szöghöz tartozó körcikk területe?



Megoldás

Ha a középponti szög α° -os, és a körcikk területét t -vel jelöljük, akkor az ívhosszúság képlete szerint

$$2 \cdot 16 \cdot \pi \cdot \alpha : 360 = 61, \quad \alpha = 61 \cdot 180 : (16\pi) \approx 218,$$

vagyis ez a középponti szög közelítőleg 218° -os.

$$\text{A körcikk területe: } t = \frac{i \cdot r}{2} = \frac{61 \cdot 16}{2} = 488 \text{ mm}^2.$$
